



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA STRUTTURALE

Corso di Dottorato in Ingegneria delle Strutture – XVII Ciclo

**Il Problema di Saint Venant: descrizione attraverso
i valori medi degli spostamenti nelle sezioni**

Relatori: Prof. F. Cafarella, Prof. S. Ligarò

Tutore: Prof. M. Sassu

Dottorando: Ing. GIORGIO MARIANI

1. INTRODUZIONE

Nel presente lavoro la trattazione del problema di Saint Venant viene svolta in maniera diversa rispetto al metodo classico, facendo riferimento fin dal principio agli spostamenti e alle rotazioni medie della sezione trasversale. Viene in sostanza evidenziato il ruolo di quelle grandezze che si utilizzano nella teoria tecnica delle travi.

La soluzione del problema è individuata in via generale considerando le equazioni indefinite di equilibrio, di congruenza e di legame costitutivo, attuando la semplificazione del tensore degli sforzi e imponendo le condizioni al contorno. Le espressioni del campo di spostamento puntuale, in virtù della procedura di soluzione adottata, risultano funzione degli spostamenti e delle rotazioni medie della sezione; in esse compaiono inoltre le grandezze cinematiche che caratterizzano lo stato deformativo della porzione infinitesima del cilindro.

A partire da tali espressioni si individuano le relazioni che legano le deformazioni alle caratteristiche della sollecitazione; queste ultime consentono, unitamente alle equazioni di equilibrio della trave, di determinare tutti i parametri che ne caratterizzano lo stato deformato.

Operando nel suddetto modo si pone immediatamente il problema della scelta più opportuna delle grandezze cinematiche per descrivere il moto della sezione. Infatti, mentre la rotazione torsionale media è univocamente individuabile, in virtù del vincolo di moto rigido a cui è sottoposto il cilindro, la stessa cosa non accade per le due rotazioni flessionali, qualora sia presente l'ingobbamento della sezione. In tale situazione la definizione degli spostamenti e rotazioni caratteristici non è univoca; inoltre, a seconda della scelta fatta, la soluzione del problema in termini di spostamenti assume espressioni diverse.

Nel presente studio si fa riferimento a due particolari espressioni degli spostamenti generalizzati della sezione, la prima derivante da considerazioni geometriche, la seconda legata a un criterio di tipo energetico. Viene quindi evidenziato come dalla suddetta scelta dipenda l'espressione dell'atto di moto del cilindro e, in particolare, come nei due casi risultino diversi il fattore di taglio ed il centro di torsione della sezione.

2. ESPRESSIONE DEGLI SPOSTAMENTI

2.1. Spostamenti e deformazioni medie nella sezione

Si consideri un solido di forma cilindrica, caratterizzato da un asse z e da sezione retta A con contorno Γ , costituito da materiale elastico lineare, omogeneo, isotropo, soggetto alle condizioni di carico e di vincolo definite dal problema di Saint Venant. Assunti come assi di riferimento trasversali x e y gli assi principali di inerzia della sezione A (fig. 1), si esprimano gli spostamenti u , v , w dei punti di questa nella forma:

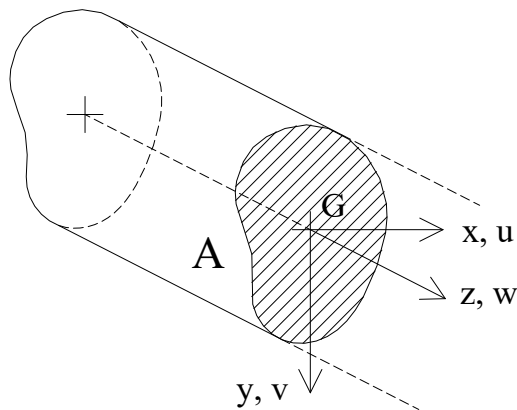


Fig. 1. Il cilindro di Saint Venant.

$$\begin{aligned}
 u &= u_m + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_m x + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_m y + u^* , \\
 v &= v_m + \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_m x + \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_m y + v^* , \\
 w &= w_m + \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_m x + \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_m y + w^* .
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

I termini u_m , v_m , w_m sono gli spostamenti medi della sezione nelle direzioni x , y , z , definiti come

$$u_m = \frac{1}{A} \int_A u \, dA \quad , \quad v_m = \frac{1}{A} \int_A v \, dA \quad , \quad w_m = \frac{1}{A} \int_A w \, dA ,$$

mentre le grandezze $\left. \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|_m$ rappresentano le medie sulla sezione delle derivate parziali degli

spostamenti nelle direzioni trasversali x e y , definite come

$$\left. \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|_m = \frac{1}{A} \int_A \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dA.$$

In virtù di questa posizione le funzioni u^* , v^* , w^* descrivono un campo di spostamenti a media nulla e a derivate parziali medie nulle sulla sezione.

Tali grandezze vengono introdotte nell'espressione del campo di spostamenti in quanto risultano immediatamente correlabili alle rotazioni e alle deformazioni medie della sezione, intese come medie integrali delle rotazioni e delle deformazioni dei singoli elementi. Infatti, dalla scomposizione del tensore gradiente di spostamento, risulta che

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, & \omega_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned}$$

ovvero

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\gamma_{xy}}{2} - \omega_z, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\gamma_{xy}}{2} + \omega_z,$$

per cui, passando ai valori medi abbiamo

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_m &= \frac{1}{A} \int_A \varepsilon_x dA = \varepsilon_{xm}, & \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_m &= \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} - \omega_z \right) dA = \frac{\gamma_{xym}}{2} - \omega_{zm} \\ \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_m &= \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} + \omega_z \right) dA = \frac{\gamma_{xym}}{2} + \omega_{zm}, & \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_m &= \frac{1}{A} \int_A \varepsilon_y dA = \varepsilon_{ym} \end{aligned}$$

Tornando alle (2.1), le grandezze $-\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_m$, $\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_m$ rappresentano la rotazione media in A degli elementi piani di normale z rispettivamente attorno agli assi y e x ; possono essere quindi riguardate come rotazioni medie della sezione attorno a tali assi, e verranno indicate con i termini

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_m = \frac{1}{A} \int_A \frac{\partial w}{\partial y} dA, \\ \varphi_y &= -\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_m = -\frac{1}{A} \int_A \frac{\partial w}{\partial x} dA. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Considerando nuovamente il tensore di deformazione abbiamo

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z},$$

per cui, in termini di valori medi, ricaviamo le relazioni

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \gamma_{zym} - \frac{dv_m}{dz}, \\ \varphi_y &= -\gamma_{xzm} + \frac{du_m}{dz}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Assunto di identificare gli spostamenti medi della sezione con gli spostamenti dell'asse del cilindro, le relazioni (2.3) mostrano la dipendenza fra la rotazione media della sezione e la rotazione dell'asse quando la porzione infinitesima di solido è soggetta a deformazione angolare media diversa da zero.

Sostituendo le espressioni ottenute nelle (2.1), troviamo che il campo di spostamenti può essere scritto nella forma

$$\begin{aligned} u &= u_m + \varepsilon_{xm} x + \left(\frac{\gamma_{xym}}{2} - \omega_{zm} \right) y + u^*, \\ v &= v_m + \left(\frac{\gamma_{xym}}{2} + \omega_{zm} \right) x + \varepsilon_{ym} y + v^*, \\ w &= w_m - \varphi_y x + \varphi_x y + w^*, \end{aligned} \quad (2.4)$$

In esso compaiono, in via del tutto generale, gli spostamenti e le deformazioni medie della sezione, oltre alle funzioni di spostamento a media nulla u^* , v^* , w^* .

In virtù dell'ipotesi semplificativa di Saint Venant sul tensore degli sforzi, valgono per le deformazioni, in ogni punto, le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= 0, \\ \varepsilon_x = \varepsilon_y &= -\nu \varepsilon_z, \end{aligned} \quad (2.5)$$

analogamente, in termini di valori medi nella sezione, risulta

$$\begin{aligned} \gamma_{xym} &= 0, \\ \varepsilon_{xm} = \varepsilon_{ym} &= -\nu \varepsilon_{zm}, \end{aligned}$$

avendo indicato con ε_{zm} la deformazione assiale media in direzione z . Sostituendo tali valori nelle (2.4) otteniamo le espressioni degli spostamenti caratteristiche del problema di Saint Venant

$$\begin{aligned} u &= u_m - v \varepsilon_{zm} x - \omega_{zm} y + u^* , \\ v &= v_m + \omega_{zm} x - v \varepsilon_{zm} y + v^* , \\ w &= w_m - \varphi_y x + \varphi_x y + w^* . \end{aligned} \quad (2.6)$$

Le deformazioni dell'elemento infinitesimo di volume si ottengono per derivazione delle (2.6) e risultano

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -v \varepsilon_{zm} + \frac{\partial u^*}{\partial x} , & \gamma_{zx} &= \gamma_{zxm} - \theta y + \frac{\partial w^*}{\partial x} + \frac{\partial u^*}{\partial z} , \\ \varepsilon_y &= -v \varepsilon_{zm} + \frac{\partial v^*}{\partial y} , & \gamma_{zy} &= \gamma_{zym} + \theta x + \frac{\partial w^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial z} , \\ \varepsilon_z &= \varepsilon_{zm} - \chi_y x - \chi_x y + \frac{\partial w^*}{\partial z} , & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x} . \end{aligned} \quad (2.7)$$

In esse compaiono due nuove caratteristiche della deformazione: le curvature flessionali χ_x e χ_y , e la curvatura torsionale θ nella sezione, definite come

$$\chi_x = -\frac{d\varphi_x}{dz} , \quad \chi_y = \frac{d\varphi_y}{dz} , \quad \theta = \frac{d\omega_{zm}}{dz} .$$

In sostanza, il campo di spostamento e di deformazione del solido viene espresso in funzione di sei parametri di spostamento, tre traslazioni e tre rotazioni, e di sei parametri deformativi. Solitamente in letteratura tali grandezze, al contrario del presente studio, non vengono esplicitamente introdotte nella trattazione di Saint Venant, ma sono oggetto successivamente della Teoria Tecnica delle Travi.

2.2. Determinazione degli spostamenti u^* , v^* e w^* .

Si considerino le equazioni indefinite di equilibrio espresse in termini di deformazioni, nella forma che esse assumono nell'ambito della teoria di Saint Venant

$$\begin{aligned}\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial y} &= -2(1+\nu) \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z}.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Da tali relazioni si deduce l'indipendenza delle γ_z e delle loro medie da z , unitamente alla linearità della distribuzione delle ε_z nella sezione. Quest'ultima condizione comporta che il termine $\varepsilon_z^* = \partial w^* / \partial z$, nella terza delle (2.7), risulti identicamente nullo, quindi lo spostamento w^* sia funzione esclusivamente di x e y .

Le espressioni delle deformazioni (2.7) consentono di individuare le funzioni di spostamento u^* e v^* tramite l'imposizione delle condizioni puntuali (2.5). Otteniamo per esse le espressioni

$$\begin{aligned}u^* &= \nu \left[\chi_y \left(\frac{x^2 - y^2}{2} - \frac{J_y - J_x}{2A} \right) + \chi_x xy \right], \\ v^* &= \nu \left[\chi_x \left(\frac{y^2 - x^2}{2} - \frac{J_x - J_y}{2A} \right) + \chi_y xy \right],\end{aligned}\quad (2.9)$$

avendo assunto gli assi x e y coincidenti con le direzioni principali d'inerzia della sezione.

Per individuare l'espressione di $w^*(x,y)$ si considerano la terza delle equazioni (2.8) più la condizione al bordo relativa alle deformazioni angolari

$$\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial y} = -2(1+\nu) \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z} \quad \text{in } A, \quad (2.10)$$

$$\gamma_z^T \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \gamma_{zx} \\ \gamma_{zy} \end{bmatrix}^T \mathbf{n} = 0 \quad \text{su } \Gamma, \quad (2.11)$$

avendo indicato con \mathbf{n} il versore della normale uscente dal contorno della sezione (fig. 2). In queste condizioni risulta

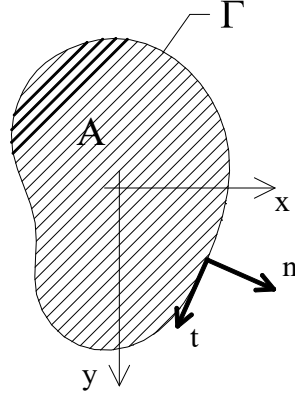


Fig. 2. Vettori tangente e normale al bordo della sezione.

$$\frac{d\varepsilon_{zm}}{dz} = 0, \quad (2.12)$$

$$\frac{d\chi_x}{dz} = -\frac{A}{2(1+\nu)J_x} \gamma_{zym}, \quad (2.13)$$

$$\frac{d\chi_y}{dz} = -\frac{A}{2(1+\nu)J_y} \gamma_{zxm}. \quad (2.14)$$

La prima si ottiene dall'integrazione su A della (2.10); moltiplicando invece entrambi i membri della (2.10) per il termine y troviamo

$$\int_A \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial x} y + \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial y} y dA = -2(1+\nu) \int_A \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z} y dA,$$

$$\int_A \frac{\partial}{\partial x} (\gamma_{zx} y) + \frac{\partial}{\partial y} (\gamma_{zy} y) - \gamma_{zy} dA = 2(1+\nu) \frac{d\chi_x}{dz} \int_A y^2 dA,$$

$$\int_{\Gamma} y \gamma_z^T \mathbf{n} ds - A \gamma_{zym} = 2(1+\nu) J_x \frac{d\chi_x}{dz},$$

da cui, in virtù della condizione al bordo (2.11), segue la (2.13). Analogamente, moltiplicando per x , si dimostra la (2.14).

Sostituendo le espressioni (2.9) nelle (2.7), e tenendo conto delle (2.13) e (2.14), si ricava che gli scorrimenti angolari risultano

$$\gamma_{zx} = \gamma_{zxm} \left[1 + \frac{f(x, y)}{J_y} \right] - \gamma_{zym} \frac{g(x, y)}{J_x} - \theta y + \frac{\partial w^*}{\partial x},$$

$$\gamma_{zy} = \gamma_{zym} \left[1 - \frac{f(x, y)}{J_x} \right] - \gamma_{zxm} \frac{g(x, y)}{J_y} + \theta x + \frac{\partial w^*}{\partial y}, \quad (2.15)$$

in cui abbiamo posto

$$f(x, y) = \frac{\nu A}{2(1+\nu)} \left(\frac{y^2 - x^2}{2} - \frac{J_x - J_y}{2A} \right), \quad (2.16)$$

$$g(x, y) = \frac{\nu A}{2(1+\nu)} xy.$$

Introducendo a questo punto le espressioni delle deformazioni puntuali (2.15) nelle equazioni (2.10) e (2.11), si determinano le condizioni che deve soddisfare la funzione di spostamento $w^*(x, y)$:

$$\Delta w^* = -\frac{A}{1+\nu} \left(\frac{\gamma_{zym}}{J_x} y + \frac{\gamma_{zxm}}{J_y} x \right) \quad \text{in } A,$$

$$\mathbf{n}^T \nabla w^* = \frac{\gamma_{zym}}{J_x} \begin{bmatrix} g(x, y) \\ f(x, y) - J_x \end{bmatrix}^T \mathbf{n} + \frac{\gamma_{zxm}}{J_y} \begin{bmatrix} -f(x, y) - J_y \\ g(x, y) \end{bmatrix}^T \mathbf{n} + \theta \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}^T \mathbf{n} = 0 \quad \text{su } \Gamma.$$

Lo spostamento $w^*(x, y)$ può esprimersi come somma di tre contributi relativi alle deformazioni γ_{zxm} , γ_{zym} , θ :

$$w^*(x, y) = \gamma_{zxm} \psi_{Tx}(x, y) + \gamma_{zym} \psi_{Ty}(x, y) + \theta \psi_M(x, y).$$

In questo caso la soluzione del problema si ottiene risolvendo i tre problemi al contorno di Dini-Neumann definiti dalle relazioni

$$\Delta \psi_M = 0 \quad \text{in } A, \quad \mathbf{n}^T \nabla \psi_M = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}^T \mathbf{n} \quad \text{su } \Gamma,$$

$$\Delta \psi_{Ty} = -\frac{A}{(1+\nu)J_x} y \quad \text{in } A, \quad \mathbf{n}^T \nabla \psi_{Ty} = \frac{1}{J_x} \begin{bmatrix} g(x, y) \\ f(x, y) - J_x \end{bmatrix}^T \mathbf{n} \quad \text{su } \Gamma, \quad (2.17)$$

$$\Delta \psi_{Tx} = -\frac{A}{(1+\nu)J_y} x \quad \text{in } A, \quad \mathbf{n}^T \nabla \psi_{Tx} = \frac{1}{J_y} \begin{bmatrix} -f(x, y) - J_y \\ g(x, y) \end{bmatrix}^T \mathbf{n} \quad \text{su } \Gamma.$$

Le funzioni ψ_M , ψ_{Ty} , ψ_{Tx} , sono univocamente determinate dai suddetti problemi al contorno e dipendono esclusivamente dalla forma della sezione; restano inoltre definite a meno di una costante arbitraria, da determinare imponendo che sia nullo il valor medio nella sezione. Allo stesso modo, implicitamente alla definizione della $w^*(x, y)$, le funzioni ψ mostrano derivate parziali medie nulle sulla sezione. In definitiva, possono riguardarsi come i contributi all'ingobbamento della sezione dovuti alle due deformazioni tangenziali e alla deformazione torsionale.

2.3. Spostamenti, deformazioni e caratteristiche della sezione

In base alle considerazioni svolte, l'atto di moto che si manifesta nella generica sezione del cilindro di Saint Venant può descriversi mediante le espressioni

$$\begin{aligned}
 u &= u_m - \nu \varepsilon_{zm} x - \omega_{zm} y + \frac{2(1+\nu)}{A} \left[-\chi_y f(x, y) + \chi_x g(x, y) \right], \\
 v &= v_m + \omega_{zm} x - \nu \varepsilon_{zm} y + \frac{2(1+\nu)}{A} \left[\chi_x f(x, y) + \chi_y g(x, y) \right], \\
 w &= w_m - \varphi_y x + \varphi_x y + \gamma_{zxm} \psi_{Tx}(x, y) + \gamma_{zym} \psi_{Ty}(x, y) + \theta \psi_M(x, y).
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

In esse compaiono gli spostamenti e le rotazioni medie della sezione, le grandezze che ne caratterizzano lo stato deformativo, due funzioni note di x e y , la cui espressione è fornita dalle (2.16), le funzioni di ingobbamento ψ definite dai problemi al contorno (2.17), da considerarsi note una volta fissata la forma della sezione.

Le espressioni delle deformazioni puntuali risultano invece

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_z &= \varepsilon_{zm} - \chi_y x - \chi_x y, \\
 \gamma_{zx} &= \theta \left(\frac{\partial \psi_M}{\partial x} - y \right) + \gamma_{zxm} \left[1 + \frac{\partial \psi_{Tx}}{\partial x} + \frac{f(x, y)}{J_y} \right] + \gamma_{zym} \left[\frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial x} - \frac{g(x, y)}{J_x} \right], \\
 \gamma_{zy} &= \theta \left(\frac{\partial \psi_M}{\partial y} + x \right) + \gamma_{zym} \left[1 + \frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial y} - \frac{f(x, y)}{J_x} \right] + \gamma_{zxm} \left[\frac{\partial \psi_{Tx}}{\partial y} - \frac{g(x, y)}{J_y} \right],
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

in cui sono presenti soltanto le caratteristiche deformative della sezione, oltre alle funzioni f , g , e ψ .

Utilizzando le definizioni delle caratteristiche della sollecitazione

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A \sigma_z dA, & M_x &= \int_A \sigma_z y dA, \\
 T_x &= \int_A \tau_{zx} dA, & M_y &= -\int_A \sigma_z x dA, \\
 T_y &= \int_A \tau_{zy} dA, & M_z &= \int_A (x \tau_{zy} - y \tau_{zx}) dA,
 \end{aligned}$$

è possibile individuare i legami che intercorrono fra queste grandezze e le caratteristiche della deformazione; tali legami risultano

$$\begin{aligned}
N &= EA \varepsilon_{zm}, & M_x &= -EJ_x \chi_x, \\
T_x &= GA \gamma_{zxm}, & M_y &= EJ_y \chi_y, \\
T_y &= GA \gamma_{zym}, & M_z - T_y \delta_{tx} + T_x \delta_{ty} &= \frac{GJ_0}{q} \theta.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

In essi con J_0 è stato indicato il momento polare della sezione, mentre q e $\delta_t = [\delta_{tx}, \delta_{ty}]^T$ rappresentano rispettivamente il fattore di torsione e il vettore posizione del centro di taglio, aventi espressione

$$\begin{aligned}
q &= \frac{J_0}{J_0 + \int_A \left(\frac{\partial \psi_M}{\partial y} x - \frac{\partial \psi_M}{\partial x} y \right) dA} = \frac{J_0}{J_0 - \int_A \left[\left(\frac{\partial \psi_M}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_M}{\partial y} \right)^2 \right] dA}, \\
\delta_{tx} &= \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial y} x - \frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial x} y \right) dA - \frac{1}{J_x A} \int_A [f(x, y) x - g(x, y) y] dA, \\
\delta_{ty} &= -\frac{1}{A} \int_A \left(\frac{\partial \psi_{Tx}}{\partial y} x - \frac{\partial \psi_{Tx}}{\partial x} y \right) dA - \frac{1}{J_y A} \int_A [-g(x, y) x + f(x, y) y] dA.
\end{aligned}$$

Queste grandezze, essendo ricavabili sulla base delle sole funzioni ψ , risultano dipendenti esclusivamente dalla forma della sezione.

Le caratteristiche della sollecitazione agenti nella generica sezione del cilindro si determinano imponendo le condizioni di equilibrio; quindi, note le deformazioni del concio infinitesimo tramite le (2.20), è possibile individuare tutti i parametri di spostamento che compaiono nelle espressioni del campo di spostamenti (2.18) tramite l'integrazione delle equazioni di compatibilità cinematica

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{zm} &= \frac{dw_m}{dz}, & \gamma_{zxm} &= -\varphi_y + \frac{du_m}{dz}, \\
\chi_x &= -\frac{d\varphi_x}{dz} = \frac{d^2 v_m}{dz^2}, & \gamma_{zym} &= \varphi_x + \frac{dv_m}{dz}, \\
\chi_y &= \frac{d\varphi_y}{dz} = \frac{d^2 u_m}{dz^2}, & \theta &= \frac{d\omega_{zm}}{dz}.
\end{aligned}$$

Tali equazioni definiscono le caratteristiche della deformazione in termini delle derivate degli spostamenti generalizzati. Da esse si deduce che l'inclinazione dell'asse del solido in un piano dipende esclusivamente dalla deformazione angolare nel piano stesso, e in particolare, l'inclinazione non è influenzata dalla deformazione torsionale del cilindro. Questo significa che, nella rappresentazione adottata, il centro di torsione è coincidente col baricentro della sezione.

3. SPOSTAMENTI DELLA SEZIONE E LAVORO DI DEFORMAZIONE

3.1. Spostamenti generalizzati della sezione e lavoro esterno

Determinate le espressioni degli spostamenti e delle deformazioni nei punti del cilindro, è possibile valutare il lavoro di deformazione in esso prodotto; si pone inoltre il problema della ricerca dei sei parametri di spostamento della sezione tali che, considerato un concio elementare del cilindro di lunghezza dz , il lavoro esterno su esso effettuato sia esprimibile come variazione della quantità

$$L_e(z) = N w' + M_x \varphi'_x + M_y \varphi'_y + T_x u' + T_y v' + M_z \omega'_z$$

Il lavoro esterno prodotto sul concio deve quindi risultare

$$dL_e(z) = \left[N \frac{dw'}{dz} + M_x \frac{d\varphi'_x}{dz} + M_y \frac{d\varphi'_y}{dz} + T_x \left(-\varphi'_y + \frac{du'}{dz} \right) + T_y \left(\varphi'_x + \frac{dv'}{dz} \right) + M_z \frac{d\omega'_z}{dz} \right] dz \quad (3.1)$$

Del resto, a partire dalle espressioni degli spostamenti e delle deformazioni fornite dalle (2.18), lo stesso lavoro può essere ricavato come

$$dL_e(z) = d \int_A \left(\sigma_z w + \tau_{zx} u + \tau_{zy} v \right) dA = \int_A \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} w + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dA dz .$$

Nel caso specifico abbiamo

$$\begin{aligned} \int_A \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} w + \sigma_z \varepsilon_z \right) dA &= N \varepsilon_{zm} - M_x \chi_x + M_y \chi_y + \\ &+ T_x \left(-\varphi_y + \gamma_{zxm} X_x + \gamma_{zym} X_{xy} + \theta \delta_{cy} \right) + T_y \left(\varphi_x + \gamma_{zxm} X_{yx} + \gamma_{zym} X_y - \theta \delta_{cx} \right), \\ \int_A \left(\tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dA &= T_x \frac{du_m}{dz} + T_y \frac{dv_m}{dz} + M_z \theta + T_x \gamma_{zxm} X_x^* + T_x \gamma_{zym} X_{yx}^* + \\ &+ T_y \gamma_{zxm} X_{xy}^* + T_y \gamma_{zym} X_y^* + \left(M_z + T_x \delta_{ly} - T_y \delta_{lx} \right) \frac{qA}{J_0} \left(-\gamma_{zxm} \delta_{cy}^* + \gamma_{zym} \delta_{cx}^* \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

in cui è stato posto

$$\begin{aligned}
\delta_{cx} &= -\frac{1}{J_x} \int_A \psi_M y dA, & \delta_{cx}^* &= -\frac{1}{AJ_x} \int_A \left[\frac{\partial \psi_M}{\partial x} g + \frac{\partial \psi_M}{\partial y} f + (f x - g y) \right] dA, \\
\delta_{cy} &= \frac{1}{J_y} \int_A \psi_M x dA, & \delta_{cy}^* &= -\frac{1}{AJ_y} \int_A \left[\frac{\partial \psi_M}{\partial x} f - \frac{\partial \psi_M}{\partial y} g - (f y + g x) \right] dA, \\
X_x &= \frac{1}{J_y} \int_A \psi_{Tx} x dA, & X_x^* &= \frac{1}{AJ_y} \int_A \left[\frac{\partial \psi_{Tx}}{\partial x} f - \frac{\partial \psi_{Tx}}{\partial y} g + \frac{f^2 + g^2}{J_y} \right] dA, \\
X_{xy} &= \frac{1}{J_y} \int_A \psi_{Ty} x dA, & X_{xy}^* &= \frac{1}{AJ_y} \int_A \left[\frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial x} f - \frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial y} g \right] dA, \\
X_y &= \frac{1}{J_x} \int_A \psi_{Ty} y dA, & X_y^* &= -\frac{1}{AJ_x} \int_A \left[\frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial x} g + \frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial y} f - \frac{f^2 + g^2}{J_x} \right] dA, \\
X_{yx} &= \frac{1}{J_x} \int_A \psi_{Tx} y dA, & X_{yx}^* &= -\frac{1}{AJ_x} \int_A \left[\frac{\partial \psi_{Tx}}{\partial x} g + \frac{\partial \psi_{Tx}}{\partial y} f \right] dA.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Sommando i termini relativi alle tensioni normali e tangenziali, e tenendo conto delle (2.3), l'espressione totale del lavoro risulta

$$\begin{aligned}
\frac{dL_e(z)}{dz} &= N \varepsilon_{zm} - M_x \chi_x + M_y \chi_y + \\
&+ T_x \left[\gamma_{zxm} \left(1 + X_x + X_x^* - \frac{qA}{J_0} \delta_{fy} \delta_{cy}^* \right) + \gamma_{zym} \left(X_{xy} + X_{yx}^* + \frac{qA}{J_0} \delta_{fy} \delta_{cx}^* \right) + \theta \delta_{cy} \right] + \\
&+ T_y \left[\gamma_{zxm} \left(X_{yx} + X_{xy}^* + \frac{qA}{J_0} \delta_{tx} \delta_{cy}^* \right) + \gamma_{zym} \left(1 + X_y + X_y^* - \frac{qA}{J_0} \delta_{tx} \delta_{cx}^* \right) - \theta \delta_{cx} \right] + \\
&+ M_z \left[\theta + \frac{qA}{J_0} \left(-\gamma_{zxm} \delta_{cy}^* + \gamma_{zym} \delta_{cx}^* \right) \right].
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Sostituendo invece nelle (3.2) le equazioni di legame fra sollecitazioni e deformazioni (2.20), il lavoro può risciversi nella forma

$$\begin{aligned}
\frac{dL_e(z)}{dz} &= N \varepsilon_{zm} - M_x \chi_x + M_y \chi_y + T_x \left[\gamma_{zxm} \left(1 + X_x + X_x^* \right) + \gamma_{zym} \left(X_{xy} + X_{yx}^* \right) + \theta \delta_{cy} \right] + \\
&+ T_y \left[\gamma_{zxm} \left(X_{yx} + X_{xy}^* \right) + \gamma_{zym} \left(1 + X_y + X_y^* \right) - \theta \delta_{cx} \right] + M_z \theta + \left(-T_x \delta_{cy}^* + T_y \delta_{cx}^* \right) \theta,
\end{aligned}$$

ovvero, sommando i termini corrispondenti,

$$\begin{aligned} \frac{dL_e}{dz} = & N \varepsilon_{zm} - M_x \chi_x + M_y \chi_y + T_x \left[\gamma_{xzm} (1 + X'_x) + \gamma_{zym} X'_{xy} + \theta \delta'_{cy} \right] + \\ & + T_y \left[\gamma_{xzm} X'_{yx} + \gamma_{zym} (1 + X'_y) - \theta \delta'_{cx} \right] + M_z \theta, \end{aligned} \quad (3.5)$$

avendo introdotto nell'espressione le seguenti grandezze

$$\begin{aligned} X'_x &= X_x + X_x^*, & X'_{xy} &= X_{xy} + X_{yx}^*, \\ X'_{yx} &= X_{yx} + X_{xy}^*, & X'_y &= X_y + X_y^*, \\ \delta'_{cx} &= \delta_{cx} - \delta_{cx}^*, & \delta'_{cy} &= \delta_{cy} - \delta_{cy}^*. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Dal confronto fra le equazioni (3.1) e (3.5) è possibile individuare i legami che intercorrono fra le nuove caratteristiche di spostamento u' , v' , w' , φ'_x , φ'_y , ω'_z , e gli spostamenti generalizzati della sezione u_m , v_m , w_m , φ_x , φ_y , ω_{zm} , definiti nel capitolo 2. In particolare deve risultare

$$\begin{aligned} \frac{dw'}{dz} &= \varepsilon_{zm} = \frac{dw_m}{dz}, & \frac{d\varphi'_x}{dz} &= -\chi_x = \frac{d\varphi_x}{dz}, & \frac{d\varphi'_y}{dz} &= \chi_y = \frac{d\varphi_y}{dz}, \\ -\varphi'_y + \frac{du'}{dz} &= \gamma_{xzm} (1 + X'_x) + \gamma_{zym} X'_{xy} + \theta \delta'_{cy} = -\varphi_y + \frac{du_m}{dz} + \gamma_{xzm} X'_x + \gamma_{zym} X'_{xy} + \theta \delta'_{cy}, \\ \varphi'_x + \frac{dv'}{dz} &= \gamma_{xzm} X'_{yx} + \gamma_{zym} (1 + X'_y) - \theta \delta'_{cx} = \varphi_x + \frac{dv_m}{dz} + \gamma_{xzm} X'_{yx} + \gamma_{zym} X'_y - \theta \delta'_{cx}, \\ \frac{d\omega'_z}{dz} &= \theta = \frac{d\omega_{zm}}{dz}, \end{aligned}$$

per cui è possibile porre, tenendo conto delle equazioni di equilibrio del cilindro (2.13) e (2.14),

$$\begin{aligned} w' &= w_m, & \varphi'_x &= \varphi_x, & \varphi'_y &= \varphi_y, & \omega'_z &= \omega_{zm}, \\ u' &= u_m + \omega_z \delta'_{cy} - \frac{2(1+\nu)}{A} (\chi_y X'_x J_y + \chi_x X'_{xy} J_x), \\ v' &= v_m - \omega_z \delta'_{cx} - \frac{2(1+\nu)}{A} (\chi_y X'_{yx} J_y + \chi_x X'_y J_x). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Tali relazioni costituiscono le equazioni di compatibilità cinematica del cilindro in termini dei nuovi parametri di spostamento, e da esse si nota come l'inclinazione dell'asse in un piano sia prodotta non solo dalla deformazione angolare nel piano stesso, ma anche da quella nel piano ortogonale e dalla deformazione torsionale. Quest'ultima, in particolare, determina spostamenti dell'asse baricentrico per effetto di un moto torsionale del cilindro attorno all'asse di rotazione passante per il punto C' , di coordinate δ'_{cx} , δ'_{cy} , che, per definizione, risulta il centro di torsione della sezione. Si osserva inoltre che i termini X' che compaiono nelle (3.7) possono riguardarsi come coefficienti di

deformabilità a taglio della sezione, dipendenti dalla forma di questa; in particolare le entità $1+X'_y$, $1+X'_x$ vengono solitamente detti *fattori di taglio* in direzione y e x . Tali fattori risultano evidentemente pari all'unità nella rappresentazione del capitolo 2, facente riferimento agli spostamenti e alle rotazioni medie della sezione.

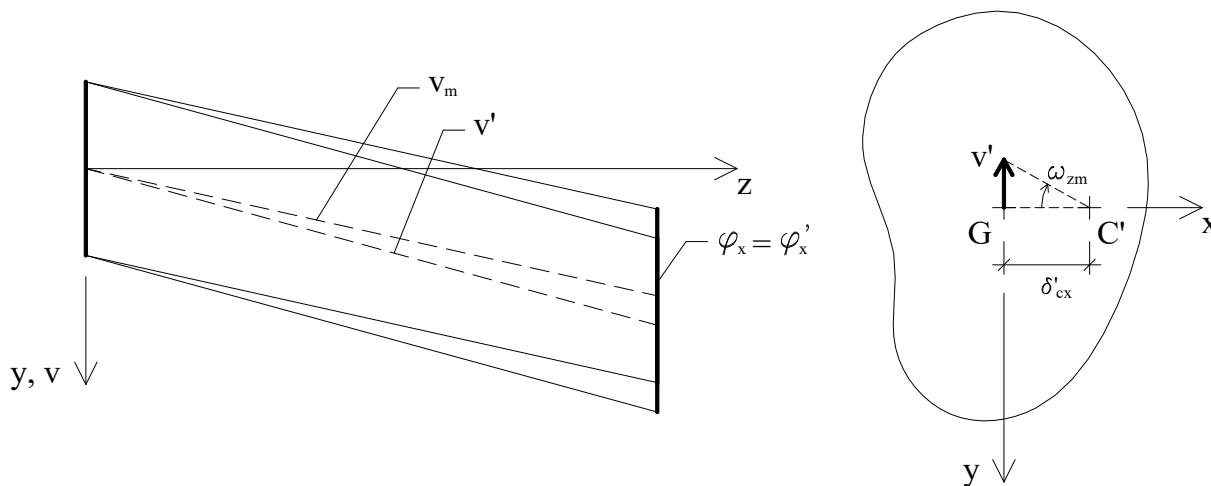


Fig. 3. Inclinazione dell'asse e centro di torsione.

Dalle equazioni (3.7) e dalle relazioni di compatibilità cinematica illustrate al capitolo 2, risulta che, nel caso di cilindro soggetto esclusivamente a deformazione torsionale, il centro di torsione è il punto attorno al quale deve ruotare la sezione affinché non si abbiano rotazioni flessionali delle sezioni attorno agli assi trasversali.

E' opportuno sottolineare come l'equazione (3.4) abbia validità sia in termini di lavoro effettivo che di lavoro virtuale, mentre la (3.5) possa essere applicata rigorosamente soltanto in termini di lavoro effettivo.

3.2. Centro di taglio e centro di torsione

Si considerino i due sistemi di sforzi-deformazioni, dedotti dalle equazioni (2.20), corrispondenti alle sollecitazioni di taglio e di momento torcente

$$T_{y,1}; \quad \gamma_{yzm,1} = \frac{T_{y,1}}{GA}, \quad \theta_1 = -\frac{q\delta_{tx}}{GJ_0} T_{y,1} \quad (3.8)$$

$$M_{z,2}; \quad \theta_2 = \frac{q}{GJ_0} M_{z,2}$$

Applicando il teorema di reciprocità di Betti mediante la (3.4) otteniamo per il lavoro mutuo di deformazione le espressioni

$$\frac{dL_{1-2}(z)}{dz} = -T_{y,1} \theta_2 \delta_{cx} = M_{z,2} \left[\theta_1 + \frac{qA}{J_0} \gamma_{zym,1} \delta_{cx}^* \right];$$

risulta quindi, sostituendo le espressioni delle (3.8),

$$\delta_{cx} = \delta_{tx} - \delta_{cx}^* \quad (3.9)$$

Analogamente, con riferimento alle sollecitazioni T_y e M_z si deduce

$$\delta_{cy} = \delta_{ty} - \delta_{cy}^* \quad (3.10)$$

Infine, dall'applicazione alle sollecitazioni di taglio T_y e T_x emerge l'identità fra i coefficienti di deformabilità congiunta

$$X'_{xy} = X'_{yx} \quad (3.11)$$

Agli stessi risultati si arriva elaborando le espressioni delle suddette grandezze; ad esempio, al fine di provare la (3.9), si considerino

$$\begin{aligned}\delta_{cx} &= -\frac{1}{J_x} \int_A \psi_M y dA, \\ \delta_{cx} &= -\frac{1}{A} \int_A \left(\frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial x} y - \frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial y} x \right) dA - \frac{1}{AJ_x} \int_A (f x - g y) dA, \\ \delta_{cx}^* &= -\frac{1}{AJ_x} \int_A \left[\frac{\partial \psi_M}{\partial x} g + \frac{\partial \psi_M}{\partial y} f + (f x - g y) \right] dA.\end{aligned}$$

In virtù di tali espressioni la (3.9) diventa

$$-\frac{1}{J_x} \int_A \psi_M y dA = \frac{1}{A} \int_A \left[-\frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial x} y + \frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial y} x + \frac{1}{J_x} \left(\frac{\partial \psi_M}{\partial x} g + \frac{\partial \psi_M}{\partial y} f \right) \right] dA. \quad (3.12)$$

Al fine di provare la suddetta equazione, si pone l'argomento dell'integrale al secondo membro nella forma

$$\begin{aligned}& -\frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial x} y + \frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial y} x + \frac{1}{J_x} \left(\frac{\partial \psi_M}{\partial x} g + \frac{\partial \psi_M}{\partial y} f \right) = \\ & = -(\nabla \psi_{Ty})^T \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} + \frac{1}{J_x} (\nabla \psi_M)^T \begin{bmatrix} g \\ f - J_x \end{bmatrix} + \frac{\partial \psi_M}{\partial y} = \\ & = -\nabla^T \left(\psi_{Ty} \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} \right) + \frac{1}{J_x} \left[\nabla^T \left(\psi_M \begin{bmatrix} g \\ f - J_x \end{bmatrix} \right) - \psi_M \nabla^T \begin{bmatrix} g \\ f - J_x \end{bmatrix} \right] + \frac{\partial \psi_M}{\partial y},\end{aligned}$$

per cui l'integrale stesso risulta

$$-\frac{1}{A} \int_A \nabla^T \left(\psi_{Ty} \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} \right) dA + \frac{1}{AJ_x} \int_A \left[\nabla^T \left(\psi_M \begin{bmatrix} g \\ f - J_x \end{bmatrix} \right) - \psi_M \nabla^T \begin{bmatrix} g \\ f - J_x \end{bmatrix} \right] dA, \quad (3.13)$$

essendo nulla la media sulla sezione delle derivate parziali della funzione ψ_M .

Applicando il teorema di Gauss, e tenendo conto delle (2.17), otteniamo che

$$\begin{aligned}\int_A \nabla^T \left(\psi_{Ty} \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} \right) dA &= \int_{\Gamma} \psi_{Ty} \mathbf{n}^T \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} ds = \int_{\Gamma} \psi_{Ty} \mathbf{n}^T \nabla \psi_M ds = \\ &= \int_A \nabla^T (\psi_{Ty} \nabla \psi_M) dA = \int_A \left[(\nabla \psi_{Ty})^T \nabla \psi_M + \psi_{Ty} \Delta \psi_M \right] dA.\end{aligned} \quad (3.14)$$

Analogamente si deduce

$$\begin{aligned}
\frac{1}{J_x} \int_A \nabla^T \left(\psi_M \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ f - J_x \end{bmatrix} \right) dA &= \frac{1}{J_x} \int_{\Gamma} \psi_M \mathbf{n}^T \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ f - J_x \end{bmatrix} ds = \int_{\Gamma} \psi_M \mathbf{n}^T \nabla \psi_{Ty} ds = \\
&= \int_A \nabla^T (\psi_M \nabla \psi_{Ty}) dA = \int_A \left[(\nabla \psi_M)^T \nabla \psi_{Ty} + \psi_M \Delta \psi_{Ty} \right] dA.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Introducendo i risultati delle (3.14) e (3.15) nella (3.13), troviamo per essa l'espressione

$$-\frac{1}{A} \int_A \psi_{Ty} \Delta \psi_M dA + \frac{1}{A} \int_A \psi_M \Delta \psi_{Ty} dA - \frac{1}{AJ_x} \int_A \psi_M \nabla^T \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ f - J_x \end{bmatrix} dA. \tag{3.16}$$

Poiché in base alle (2.16) e alle (2.17) risulta

$$\Delta \psi_M = 0, \quad \Delta \psi_{Ty} = -\frac{A}{(1+\nu)J_x} y, \quad \nabla^T \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ f - J_x \end{bmatrix} = \frac{\nu A}{1+\nu} y,$$

la (3.16) diventa

$$-\frac{1}{(1+\nu)J_x} \int_A \psi_M y dA - \frac{\nu}{(1+\nu)J_x} \int_A \psi_M y dA = -\frac{1}{J_x} \int_A \psi_M y dA.$$

Discendendo questa dal secondo membro della (3.9), resta provata la stessa. In maniera analoga è possibile dimostrare la (3.10) e la (3.11).

Le relazioni (3.9) e (3.10) consentono di scrivere coordinate del centro di torsione definite nelle (3.6) nella forma

$$\delta'_{cx} = 2\delta_{cx} - \delta_{tx}, \quad \delta'_{cy} = 2\delta_{cy} - \delta_{ty}.$$

In genere, le quantità δ_{cx}^* e δ_{cy}^* risultano di entità trascurabile; pertanto dalle (3.9) e (3.10) si deduce che il centro di torsione è prossimo al centro di taglio.

3.3. Il lavoro di deformazione interno

Ci si pone l'obiettivo di determinare le espressioni dei coefficienti di deformabilità a taglio definiti dalle (3.6) a partire dall'espressione del lavoro interno di deformazione, mediante l'applicazione del teorema di Clapeyron. Si consideri a tal proposito per semplicità il cilindro soggetto esclusivamente a deformazione tangenziale e flessionale nel piano y - z ; ovvero si ponga

$$\varepsilon_{zm} = 0 \quad , \quad \theta = 0 \quad , \quad \gamma_{zxm} = 0 \quad , \quad \chi_y = 0 .$$

In tale situazione le deformazioni puntuali, descritte dalle (2.19), si riducono a

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= -\chi_x y , \\ \gamma_{zx} &= \gamma_{zym} \left[\frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial x} - \frac{g(x, y)}{J_x} \right] , \\ \gamma_{zy} &= \gamma_{zym} \left[1 + \frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial y} - \frac{f(x, y)}{J_x} \right] . \end{aligned} \quad (3.17)$$

Facendo ancora riferimento al concio elementare di cilindro di lunghezza dz , il lavoro esterno è esprimibile mediante la (3.5) come

$$\frac{dL_e}{dz} = -M_x \chi_x + T_y \gamma_{zym} (1 + X'_y) , \quad (3.18)$$

Il lavoro interno è invece valutabile come

$$dL_i = \int_A (\sigma_z \varepsilon_z + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{zy} \gamma_{zy}) dA dz , \quad (3.19)$$

quindi, andando a sostituire nella (3.19) le espressioni delle tensioni e deformazioni fornite dalle (3.17), troviamo per esso l'espressione

$$\begin{aligned} dL_i &= \left[-M_x \chi_x + T_y \gamma_{zym} + \frac{T_y \gamma_{zym}}{A} \int_A \left[\left(\frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial y} \right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2}{J_x} \left[\frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial x} g + \frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial y} f \right] + \frac{f^2 + g^2}{J_x^2} \right] dA \right] dz . \end{aligned}$$

L'applicazione del teorema di Clapeyron alla porzione di cilindro considerata si traduce nell'imporre

$$\frac{dL_e}{dz} dz = dL_i,$$

si deduce pertanto la relazione

$$\mathbf{X}'_y = \frac{1}{A} \int_A \left[\left(\frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{J_x} \left[\frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial x} g + \frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial y} f \right] + \frac{f^2 + g^2}{J_x^2} \right] dA, \quad (3.20)$$

che costituisce l'espressione del coefficiente di deformabilità a taglio in y individuata in base al lavoro interno.

Del resto, dalle (3.3) e (3.6) sappiamo che risulta anche

$$\mathbf{X}'_y = \mathbf{X}_y + \mathbf{X}_y^* = \frac{1}{J_x} \int_A \psi_{Ty} y dA - \frac{1}{A J_x} \int_A \left[\frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial x} g + \frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial y} f - \frac{f^2 + g^2}{J_x} \right] dA, \quad (3.21)$$

pertanto, confrontando la (3.20) con la (3.21) emerge che

$$\frac{1}{J_x} \int_A \psi_{Ty} y dA = \frac{1}{A} \int_A \left[\left(\frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{J_x} \left[\frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial x} g + \frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial y} f \right] \right] dA. \quad (3.22)$$

Tale relazione può essere provata riscrivendo la funzione integranda al secondo membro nel seguente modo

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{J_x} \left(\frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial x} g + \frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial y} f \right) = \\ & = (\nabla \psi_{Ty})^T \nabla \psi_{Ty} - \frac{1}{J_x} (\nabla \psi_{Ty})^T \begin{bmatrix} g \\ f - J_x \end{bmatrix} - \frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial y} = \\ & = \nabla^T (\psi_{Ty} \nabla \psi_{Ty}) - \psi_{Ty} \Delta \psi_{Ty} - \frac{1}{J_x} \left[\nabla^T \left(\psi_{Ty} \begin{bmatrix} g \\ f - J_x \end{bmatrix} \right) - \psi_{Ty} \nabla^T \begin{bmatrix} g \\ f - J_x \end{bmatrix} \right] - \frac{\partial \psi_{Ty}}{\partial y}. \end{aligned}$$

Applicando il teorema di Gauss e tenendo conto delle (2.17) si ottiene

$$\begin{aligned} \int_A \nabla^T (\psi_{Ty} \nabla \psi_{Ty}) dA &= \int_{\Gamma} \psi_{Ty} \mathbf{n}^T \nabla \psi_{Ty} ds = \frac{1}{J_x} \int_{\Gamma} \psi_{Ty} \mathbf{n}^T \begin{bmatrix} g \\ f - J_x \end{bmatrix} ds = \\ &= \frac{1}{J_x} \int_A \nabla^T \left(\psi_{Ty} \begin{bmatrix} g \\ f - J_x \end{bmatrix} \right) dA, \end{aligned}$$

il secondo membro della (3.22) assume quindi espressione

$$-\frac{1}{A} \int_A \psi_{Ty} \Delta \psi_{Ty} dA + \frac{1}{AJ_x} \int_A \psi_{Ty} \nabla^T \begin{bmatrix} g \\ f - J_x \end{bmatrix} dA, \quad (3.23)$$

essendo nulle le medie sulla sezione delle derivate parziali della funzione ψ_{Ty} . Del resto, dalle (2.16) e dalle (2.17) risulta inoltre

$$\Delta \psi_{Ty} = -\frac{A}{(1+\nu)J_x} y, \quad \nabla^T \begin{bmatrix} g \\ f - J_x \end{bmatrix} = \frac{\nu A}{1+\nu} y.$$

Sostituendo tali espressioni nella (3.23) si ottiene

$$\frac{1}{(1+\nu)J_x} \int_A \psi_{Ty} y dA + \frac{\nu}{(1+\nu)J_x} \int_A \psi_{Ty} y dA = \frac{1}{J_x} \int_A \psi_{Ty} y dA,$$

resta quindi dimostrata la (3.22). Analoghe considerazioni possono effettuarsi per il coefficiente di deformabilità a taglio in direzione x e per i coefficienti di deformabilità congiunta relativi agli assi x e y .

4. CONCLUSIONI

Nella presente trattazione il campo di spostamenti del cilindro di Saint Venant è stato determinato facendo riferimento agli spostamenti e alle rotazioni medie della sezione. Fra queste, le rotazioni attorno ai due assi trasversali sono state definite come medie integrali delle corrispondenti rotazioni locali.

Sulla base di tale metodologia, le espressioni che descrivono l'atto di moto del cilindro risultano funzione, oltre che degli spostamenti medi, anche delle caratteristiche di deformazione della sezione. I legami fra tali caratteristiche e le derivate degli spostamenti mettono in evidenza come, per la particolare rappresentazione adottata, la deformazione del cilindro sia caratterizzata da fattore di taglio unitario e centro di torsione coincidente col baricentro della sezione. Tuttavia, nella trattazione del problema, si fa in genere riferimento a un diverso insieme di spostamenti caratteristici della sezione, individuato mediante considerazioni di carattere energetico. Si considera infatti quel sistema di spostamenti che fa compiere alle sollecitazioni un lavoro pari a quello prodotto dalle tensioni sull'intera sezione.

Operando questa scelta, le relazioni fra deformazioni tangenziali, rotazioni della sezione e inclinazioni dell'asse risultano meno dirette; in esse compaiono infatti i coefficienti di deformabilità a taglio e il centro di torsione della sezione, che nel caso specifico non è più coincidente col baricentro, bensì prossimo al centro di taglio [1]. Si rileva inoltre che, in assenza di particolari simmetrie, le deformazioni angolari in un piano principale producono inclinazione dell'asse del cilindro nell'altro.

In ogni caso l'arbitrarietà riguarda soltanto la soluzione del problema in termini di spostamenti; infatti le distribuzioni di tensioni e deformazioni puntuali risultano univocamente determinate, non dipendendo le espressioni di tali grandezze dalla definizione di spostamento generalizzato adottata.

Dalle relazioni che intercorrono fra i due tipi di spostamenti si ricavano le espressioni dei fattori di taglio e le coordinate del centro di torsione. Le prime risultano formalmente differenti rispetto a quelle che si ottengono applicando il teorema di Clapeyron alla porzione infinitesima di solido; tuttavia risultano ad esse perfettamente equivalenti se il teorema è applicato rigorosamente, ovvero, se non viene trascurato nel computo del lavoro esterno il contributo relativo al sistema di spostamenti a derivate medie nulle nella sezione.

5. RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] L. DONATO (1949) – *Lezioni di Scienza delle Costruzioni*.
- [2] M. CAPURSO (1981) – *Lezioni di Scienza delle Costruzioni*. Pitagora Editrice, Bologna.
- [3] G. SOLLAZZO, S. MARZANO (1988) – *Scienza delle costruzioni 2, elementi di meccanica dei continui e resistenza dei materiali*, UTET, Torino.